קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ד': עוצמות (גרסה 1, 13.5.2000)

נגדיר עתה שני מושגים שונים זה מזה של יחס סדר חלקי, ושניהם נקראים באותו שם. זה לא יוצר בעייה כי שני המושגים הללו קשורים מאוד אחד בחברו ובכל פעם שנשתמש בהם יהיה ברור לגמרי לאיזה מושג אנו מתכוונים.

58. **הגדרה**. יחס $\leq$ על מחלקה A כלומר, יחס חלקי ל- $A \times A$, נקרא **יחס סדר חלקי** על A אם הוא מקיים את התנאים הבאים:

א. רפלקסיביות – לכל $x \in A$ $\;x \leq x$.

ב. אנטיסימטריה – לכל $x, y \in A$ אם $x \leq y$ ו- $y \leq x$ אז $x = y$.

ג. טרנזיטיביות – לכל $x, y, z \in A$ אם $x \leq y$ ו- $y \leq z$ אז $x \leq z$.

59. **הגדרה**. יחס $<$ על מחלקה A כלומר, יחס חלקי ל- $A \times A$, נקרא **יחס סדר חלקי** על A אם הוא מקיים את התנאים הבאים:

א. אירפלקסיביות – לכל $x \in A$ $\;x \not< x$.

ב. טרנזיטיביות – לכל $x, y, z \in A$ אם $x < y$ ו- $y < z$ אז $x < z$.

ומשני תנאים אלו נובע כי קיים גם:

ג. אסימטריה – לכל $x, y \in A$ לא יתכן שקיים גם $x < y$ וגם $y < x$. [כי אם $x < y < x$ אז לפי ב' $x < x$, בסתירה ל-א'.]

60. **למה**. א. אם $\leq$ יחס סדר חלקי על A אז היחס $<$ על A המוגדר ע"י $x < y$ אם $x \leq y$ ו- $x \neq y$ הוא יחס סדר חלקי על A.

ב. אם $<$ יחס סדר חלקי על A אז היחס $\leq$ על A המוגדר ע"י $x \leq y$ אם $x < y$ או $x = y$ הוא יחס סדר חלקי על A.

61. **מושג המספר המונה**. הרעיון הבסיסי הוא למצוא "מספר" לכל קבוצה, לאו דווקא לקבוצות הסופיות שעבורן כבר יש לנו מספרים. כמובן שלשתי קבוצות שוות עוצמה יש אותו מספר, ולקבוצות שאינן שוות עוצמה יש מספרים שונים. נסמן את המספר של קבוצה A, שנקרא לו **העוצמה** של A ב-$|A|$, ואז את מה שאמרנו זה עתה נכתוב כ-

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B \tag{1}$$

בהנתן קבוצה A, קיימת התכונה של קבוצה x כלשהי להיות שווה עוצמה ל-A. לתכונה זאת מתאימה כמובן המחלקה $\{x | x \approx A\}$. לפני שהיה ידוע על האנטינומיה של רסל מחלקה זאת נחשבה לקבוצה ולכן היה אפשר להגדיר את $|A|$ כקבוצה זאת, וכך עשה Frege בשנת 1884. כעת שאנו יודעים שזאת מחלקה, וקל להוכיח שאינה קבוצה, היא אינה עונה על מטרתנו שהעוצמה של קבוצה תהיה עצם מתמטי. לכן בשלב זה נוותר על הגדרת העוצמה, נתייחס לפעולה הנותנת לכל קבוצה את העוצמה שלה כאל מושג יסודי חדש ונקבע את (1) כאקסיומה. פירושו של דבר הוא שלקבוצה A איננו יודעים דבר על העצם $|A|$, פרט לכך שהוא העוצמה של A, אבל גם אין לנו כל סיבה לרצות לדעת משהו נוסף על A.

עצם כלשהו נקרא **עוצמה**, או **מספר מונה**, או, בקיצור, **מונה** אם הוא עוצמה של קבוצה כלשהי. האותיות a, b, c, d, e יסמנו בהמשך עוצמות, אלא אם כן יאמר אחרת, במפורש או במשתמע.

62. **העוצמות הסופיות**. בניגוד לסתם קבוצה A, שאין לנו סיבה מיוחדת לבחור בעצם מסויים כעוצמה שלו (וליתר דיוק היתה לנו סיבה כזאת אבל היא הביאה אותנו למחלקה שאינה קבוצה) הרי לקבוצה A סופית, ובמיוחד לקבוצה N_n, יש מועמד מתאים למספר האיברים, הידוע לנו עוד מכיתה א', והוא המספר n. לכן

נוסיף אקסיומה שניה והיא

$$|N_n| = n \tag{2}$$

האם אקסיומה זאת מתנגשת עם אקסיומה (1) בכך שהיא מתאימה עוצמות שונות לקבוצות שוות עוצמה?
התשובה לכך היא שלילית, כי לפי 32ג' אם $m \neq n$ אז $N_m \not\approx N_n$.
בהמשך נשתמש באותיות k, l, m, n כמשתני מספרים טבעיים.

63. **זמניות אקסיומות העוצמה**. בהמשך נוכל, בהנחות מסויימות להגדיר את מושג העוצמה כך שנוכל להוכיח את (1) ואת (2). אז, כמובן ייהפכו (1) ו-(2) מאקסיומות למשפטים.

64. **משפט**. א. לכל קבוצה A, A היא סופית אםם $|A| \in N$.
ב. לכל קבוצה A, $|A| = 0$ אםם A היא ריקה.

65. **הגדרה**. א. $|N| = \aleph_0$.
ב. $|\Re| = 2^{\aleph_0}$. בשלב זה יש לראות ב-$2^{\aleph_0}$ סימן אחד ולא חזקה.

66. **הגדרת הסדר החלקי**. למונים a, b, $a \leq b$ אם קיימות קבוצות A, B כך ש- $|A| = a$, $|B| = b$ ו-$A \preceq B$. $a < b$ אם $a \leq b$ ו- $a \neq b$.
$a \geq b$ אם $b \leq a$. $a > b$ אם $b < a$.

67. **למה**. א. התנאים הבאים שקולים:
(i). $a \leq b$.
(ii). קיימות קבוצות A, B כך ש- $|A| = a$, $|B| = b$ ו- $A \subseteq B$.
(iii). לכל קבוצה B כך ש- $|B| = b$ קיימת קבוצה $A \subseteq B$ כך ש- $|A| = a$.
(iv). לכל הקבוצות A, B המקיימות $|A| = a$ ו- $|B| = b$ קיים $A \preceq B$.
ב. התנאים הבאים שקולים:
(i). $a < b$.
(ii). קיימות קבוצות A, B המקיימות $|A| = a$, $|B| = b$ ו- $A \prec B$.
(iii). לכל הקבוצות A, B המקיימות $|A| = a$ ו- $|B| = b$ קיים $A \prec B$.

68. **משפט**. היחסים $\leq$ ו-$<$ בין העוצמות הם יחסי סדר חלקיים.
[נובע מ-49 ו-67. הוכחת האנטיסימטריה של $\leq$ והטרנזיטיביות של $<$ מסתמכת על משפט קנטור-ברנשטיין].

69. **משפט**. א. לכל $n \in N$ קיים $n < \aleph_0$. [67 ו-32ה']
ב. $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. [67ב' ו-51]

70. **חד משמעיות $\leq$ על המספרים הטבעיים**. לצורכי משפט זה נסמן ב-$\leq_c$ את היחס $\leq$ שהוגדר ב-66, וב-$\leq$ את יחס הסדר המוכר לנו על הטבעיים. קיים לכל m, n $m \leq_c n$ אםם $m \leq n$. [אם $m > n$ לא יתכן $m \leq_c n$, לאור 31].

71. **למה**. א. תהי F העתקה חח"ע של A על C ו-G העתקה חח"ע של B על D ויהי $A \cap B = \emptyset$ ו- $C \cap D = \emptyset$ אז $F \cup G$ היא העתקה חח"ע של $A \cup B$ על $C \cup D$. [26.2]
ב. אם $A \approx C$, $B \approx D$, $A \cap B = \emptyset$ ו- $C \cap D = \emptyset$ אז $A \cup B \approx C \cup D$.

72. **הגדרת החיבור**. לעוצמות a, b תהיינה A, B קבוצות כך ש- $|A| = a$, $|B| = b$ ו- $A \cap B = \emptyset$. הסכום $a + b$ מוגדר כ- $|A \cup B|$.
כדי לראות שהחיבור מוגדר לכל זוג עוצמות והוא מוגדר היטב עלינו להוכיח את הדברים הבאים.
א. כדי שהחיבור יהיה מוגדר לכל a, b עלינו לראות כי לכל a, b יש קבוצות A, B כמו בהגדרה. לפי הגדרת מושג העוצמה קיימות קבוצות A, B כך ש- $|A| = a$ ו- $|B| = b$. אם הן אינן זרות נחליף אותן ב- $\{0\} \times A$ וב- $\{1\} \times B$ שהן זרות ושוות עוצמה ל-A ול-B, בהתאמה.

ב. כדי לראות שהסכום שהוגדר כאן אינו תלוי בבחירת הקבוצות A,B, תהיינה גם A',B' קבוצות כאלו ואז $|A|=a=|A'|$ ו- $|B|=b=|B'|$ ולכן $A\approx A'$ ו- $B\approx B'$ ומכיוון ש- $A\cap B=\emptyset$ ו- $A'\cap B'=\emptyset$ לכן לפי 71ב' קיים $A\cup B\approx A'\cup B'$ ומכאן $a+b=|A\cup B|=|A'\cup B'|$, והחלפת A,B ב- A',B' אינה משנה את $a+b$.

73. **משפט**. א. חוק החילוף: $a+b=b+a$.

ב. חוק הקיבוץ: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

ג. $a+0=a$.

74. **משפט**. א. $a+b\geq a$.

ב. אם $a\leq b$ אז קיים מונה c כך ש- $a+c=b$.

[לפי 67א' קיימים $a=|A|$, $b=|B|$ כך ש- $A\subseteq B$ ואז $|A|+|B\setminus A|=|B|$]

ג. מונוטוניות: אם $a\leq b$ אז $c+a\leq c+b$.

[לפי ב' קיים d כך ש- $a+d=b$ ולפי א' $c+a\leq(c+a)+d=c+(a+d)=c+b$.]

75. **משפט**. א. לכל $n\in N$ $\aleph_0+n=\aleph_0$. [38ו']

ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$. [38ח']

76. **משפט**. א. אם $a\geq\aleph_0$ אז $a+\aleph_0=a$ ולכל $n\in N$ $a+n=a$. [74ב' ו-75]

ב. אם $b+b=b$ ו- $a\geq b$ אז $a+b=a$. [74ב' ו-73]

ג. אם $a=a+b$ ו- $b>0$ אז $a\geq\aleph_0$. [38.1]

77. **משפט**. $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}$, לכל $n\in N$. [47, 67 ו-68]

78. **משפט**. א. לא קיים חילוץ בחיבור מונים כי $\aleph_0+1=\aleph_0+0=\aleph_0$ אולם $1\neq 0$. לכן אי אפשר להגדיר חיסור של מונים הדומה לחיסור של מספרים טבעיים.

ב. הכוון ההפוך של מונוטוניות החיבור לא קיים כי $\aleph_0+1\leq\aleph_0+0$, $\aleph_0$, אולם $1\not\leq 0$.

ג. לא קיימת המונוטוניות החזקה של החיבור כי $0<1$ בעוד $\aleph_0+1=\aleph_0+0$.

ד. על השאלה אם $c+a<c+b$ גורר כי $a<b$ אין תשובה בשלב זה.

79. **חד משמעיות החיבור על המספרים הטבעיים**. כרגע יש לנו שתי פעולות חיבור על המספרים הטבעיים. האחת היא פעולת החיבור המוכרת לנו מימים ימימה, והשניה היא פעולת החיבור שהוגדרה ב-72. שתי פעולות אלו הן אותה הפעולה.

הוכחה. נסמן, לצורכי הוכחה זאת בלבד, את פעולת החיבור שהוגדרה ב-72 ב- $+_c$. נוכיח באינדוקציה על l כי $k+_cl=k+l$. ל- $l=0$ $k+_c0=k=k+0$, לפי 73ג'. ל- $l=1$ $k+_c1=|N_k\cup\{k\}|=|N_{k+1}|=k+1$. בהנחה שהשיווין נכון ל-$l$ אז

$k+_c(l+1)=k+_c(l+_c1)=(k+_cl)+_c1=(k+l)+_c1=(k+l)+1=k+(l+1)$, לפי המקרה $l=1$, הנחת האינדוקציה ו-73ב'.

80. **למה**. אם $A\approx A'$ ו- $B\approx B'$ אז $A\times B\approx A'\times B'$.

הוכחה. אם F העתקה של A על A' ו-G העתקה של B על B' אז H שתחומה $A\times B$ והמוגדרת ע"י $H(x,y)=\langle F(x),G(y)\rangle$ היא העתקה חח"ע של $A\times B$ על $A'\times B'$.

81. **הגדרת הכפל**. לעוצמות a,b תהיינה A,B קבוצות כך ש- $a=|A|$, ו- $b=|B|$. המכפלה $a\cdot b$ מוגדרת כ- $|A\times B|$.

כדי לראות שהכפל מוגדר היטב עלינו להוכיח שהמכפלה שהוגדרה כאן אינה תלויה בבחירת הקבוצות A,B, תהיינה גם A',B' קבוצות כאלו ואז $|A|=a=|A'|$ ו- $|B|=b=|B'|$ ולכן $A\approx A'$ ו- $B\approx B'$. לפי 80 קיים $A\times B\approx A'\times B'$ ומכאן $a\cdot b=|A\times B|=|A'\times B'|$, והחלפת A,B ב- A',B' אינה משנה את $a\cdot b$.

82. **משפט**. א. חוק החילוף: $a \cdot b = b \cdot a$.
ב. חוק הקיבוץ: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
ג. $a \cdot 0 = 0$,$a \cdot 1 = a$.
ד. חוק הפילוג: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
ה. $a \cdot b = 0$ אםם $a = 0$ או $b = 0$.
ו. מונוטוניות הכפל: אם $b \le a$ אז $c \cdot a \le c \cdot b$. [ד' ו-74]

83. **משפט**. א. לכל $0 \neq n \in N$ קיים $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$. [39, 182' ו-68]
ב. לכל $0 \neq n \in N$ קיים $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$.
ו $F : (0,1) \times N \to \Re$ הנתונה ע"י $F(w, n) = n + w$ היא חח"ע, ולכן $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0}$. מכאן משתמשים ב-182' וב-68.]

84. **משפט**. א. לא קיים חילוץ בכפל מונים כי $\aleph_0 \cdot 1 = \aleph_0 \cdot 2$ אולם $2 \neq 1$. לכן אי אפשר להגדיר פעולה הדומה לחילוק עם שארית של מספרים טבעיים.
ב. הכוון ההפוך של מונוטוניות הכפל לא קיים כי $\aleph_0 \cdot 1 \le \aleph_0 \cdot 2$, אולם $2 \not\le 1$.
ג. לא קיימת המונוטוניות החזקה של הכפל כי $1 < 2$ בעוד $\aleph_0 \cdot 1 = \aleph_0 \cdot 2$.
ד. על השאלה אם $c \cdot a < c \cdot b$ גורר כי $a < b$ אין תשובה בשלב זה.

85. **חד משמעיות הכפל על המספרים הטבעיים**. כרגע יש לנו שתי פעולות כפל על המספרים הטבעיים. האחת היא פעולת הכפל המוכרת לנו מימים ימימה, והשניה היא פעולת הכפל שהוגדרה ב-81. שתי פעולות אלו הן אותה הפעולה.

הוכחה. נסמן, לצורכי הוכחה זאת בלבד, את פעולת הכפל שהוגדרה ב-81 ב- $\cdot_c$. נוכיח באינדוקציה על l כי $k \cdot_c l = k \cdot l$. ל- $l = 0$ $k \cdot_c 0 = 0 = k \cdot 0$, לפי82ג'. בהנחה שהשיוויון נכון ל-l אז $k \cdot_c (l+1) = k \cdot_c l + k \cdot_c 1 = k \cdot_c l + k = k \cdot l + k = k \cdot (l+1)$, לפי 82ד', 82ג' והנחת האינדוקציה.

86. **משפט**. $n \cdot a$ היא תוצאת החיבור של a לעצמו שוב ושוב עם n מחוברים. במיוחד $2 \cdot a = a + a$.

הוכחה. נסמן את החיבור של a לעצמו עם n מחוברים ב- $\mathrm{add}(n, a)$. חיבור זה מוגדר ע"י הרקורסיה הבאה: $\mathrm{add}(0, a) = 0$ ו- $\mathrm{add}(n+1, a) = \mathrm{add}(n, a) + a$. השיוויון $\mathrm{add}(n, a) = n \cdot a$ מוכח באינדוקציה על n.

87. **למה**. עבור הפעולה ${}^{B}\!A$ המוגדרת ב-55 קיים:
א. אם $A \approx C$ ו- $B \approx D$ אז ${}^{B}\!A \approx {}^{D}C$.
ב. ${}^{\emptyset}\!A = \{\emptyset\}$.
ג. אם $B \neq \emptyset$ אז ${}^{B}\emptyset = \emptyset$.
ד. אם $B \cap C = \emptyset$ אז ${}^{B \cup C}\!A \approx {}^{B}\!A \times {}^{C}\!A$.
ה. ${}^{C}(A \times B) \approx {}^{C}\!A \times {}^{C}B$.
ו. ${}^{C}({}^{B}\!A) \approx {}^{C \times B}\!A$.

הוכחה. א. אם F העתקה חח"ע של A על C ו-G העתקה חח"ע של B על D אז $H : {}^{B}\!A \to {}^{D}C$ מוגדרת כך שעבור $j \in {}^{B}\!A$ $H(j) \in {}^{D}C$ היא הפונקציה שתחומה D המוגדרת ע"י $H(j) = FjG^{-1}$. H חח"ע כי עבור $j \in {}^{B}\!A$ $j = F^{-1}H(j)G$. H על ${}^{D}C$ כי אם $d \in {}^{D}C$ אז $F^{-1}gG \in {}^{B}\!A$ ו- $H(F^{-1}gG) = g$.
ד. תהי $H : {}^{B \cup C}\!A \to {}^{B}\!A \times {}^{C}\!A$ מוגדרת כך שעבור $j \in {}^{B \cup C}\!A$ $H(j) = \langle j \restriction B, j \restriction C \rangle$. H היא חח"ע כי עבור $j \in {}^{B \cup C}\!A$ $j = j \restriction B \cup j \restriction C$. H היא על ${}^{B}\!A \times {}^{C}\!A$ כי אם $f \in {}^{B}\!A$ ו- $g \in {}^{C}\!A$ אז $f \cup g \in {}^{B \cup C}\!A$ ו- $H(f \cup g) = \langle f, g \rangle$.

ה. נסמן ב- 1^{st} את הפונקציה שתחומה הוא מחלקת כל הזוגות הסדורים והנותנת כערך את הרכיב הראשון של הזוג, כלומר $1^{\mathrm{st}}(x, y) = x$, וב- 2^{nd} הפונקציה שתחומה הוא מחלקת כל הזוגות הסדורים והנותנת כערך את הרכיב השני של הזוג, כלומר $2^{\mathrm{nd}}(x, y) = y$. תהי $H : {}^{C}(A \times B) \to {}^{C}\!A \times {}^{C}B$ מוגדרת כך

שעבור $j \in {}^C(A \times B)$ $H(j) = \langle 1^{\mathrm{st}}j, 2^{\mathrm{nd}}j \rangle$. H היא חח"ע ועל ${}^CA \times {}^CB$, כי אם $\langle f, g \rangle \in {}^CA \times {}^CB$ אז ה-$j \in {}^C(A \times B)$ היחיד כך ש- $H(j) = \langle f, g \rangle$ הוא j הנתון ע"י $j(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$.

ו. תהי $H : {}^C({}^BA) \to {}^{C\times B}A$ מוגדרת כך שעבור $j \in {}^C({}^BA)$ $H(j)$ הוא הפונקציה שתחומה $C \times B$ והמקיימת, לכל $x \in C$ ו- $y \in B$, $H(j)(x, y) = j(x)(y)$. H היא חח"ע כי אם $H(j_1) = H(j_2)$ אז לכל $x \in C$ ו- $y \in B$ $j_1(x)(y) = H(j_1)(x, y) = H(j_2)(x, y) = j_2(x)(y)$, ומכיוון שהתחום של $j_1(x)$ ו $j_2(x)$ הוא B לכן $j_1(x) = j_2(x)$, וזה לכל $x \in C$ ולכן $j_1 = j_2$. H היא על ${}^{C\times B}A$ כי אם $w \in {}^{C\times B}A$ תהי $j \in {}^C({}^BA)$ הפונקציה שתחומה C ולכל $x \in C$ $j(x)$ היא פונקציה שתחומה B וכך שלכל $y \in B$ $j(x)(y) = w(x, y) \in A$. קיים לכל $x \in C$ ולכל $y \in B$ $H(j)(x, y) = j(x)(y) = w(x, y)$ ולכן $H(j) = w$, ו-H היא על ${}^{C\times B}A$.

88. **הגדרת החזקה**. לעוצמות a, b תהיינה A, B קבוצות כך ש- $|A| = a$, ו- $|B| = b$. החזקה a^b מוגדרת כ- $|{}^BA|$.

כדי לראות שהחזקה מוגדרת היטב עלינו להוכיח שהחזקה שהוגדרה כאן אינה תלויה בבחירת הקבוצות A, B. תהיינה גם C, D קבוצות כאלו ואז $|C| = a = |A|$ ו- $|D| = b = |B|$ ולכן $C \approx A$ ו- $D \approx B$, ולפי 87א' קיים ${}^DC \approx {}^BA$ ומכאן $|{}^DC| = |{}^BA| = a^b$, והחלפת A, B ב- C, D אינה משנה את a^b.

היכן שכתוב a^{b^c} ללא סוגריים הכוונה היא ל- $a^{(b^c)}$.

89. **משפט**. א. $a^0 = 1$. [87ב']

ב. $a^b = 0$ אםם $b \neq 0$ ו- $a = 0$. [87ג']

ג. $a^1 = a$, $1^a = 1$.

90. **כללי החזקה**. א. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$. [87ד']

ב. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$. [87ה']

ג. $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$. [87ו']

91. **מונוטוניות החזקה**. א. אם $a \le b$ ו- $c \neq 0$ אז $c^a \le c^b$. [74ב', 90א', 89ב' ו-82ו']

ב. אם $a \le b$ אז $a^c \le b^c$. [כי אם $A \subseteq B$ אז ${}^CA \subseteq {}^CB$]

92. **משפט**. $|\Re| = 2^{\aleph_0}$. ב-62ב' סימנו את $|\Re|$ ב-$2^{\aleph_0}$ ואמרנו שיש להתייחס ל-$2^{\aleph_0}$ כאל סימן בודד. כאן אנו אומרים כי $|\Re| = 2^{\aleph_0}$ היכן שהמשמעות של $2^{\aleph_0}$ היא החזקה, כפי שהוגדרה ב-88. שיוויון זה נובע מייד מ-56 ו-57.

93. **משפט**. לכל קבוצה A קיים $|P(A)| = 2^{|A|}$. [56]

94. **משפט**. א. לכל $n > 0$ $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0}$, ובמיוחד $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

ב. אם $a \cdot a = a$ אז לכל $2 \le b \le 2^a$ $b^a = 2^a$.

ג. $\left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

הוכחה. א. $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, לפי 90ג' ו-83א'. מכאן השתמש ב-91א' ובתכונות $\le$.

ב. $2^a \le b^a \le (2^a)^a = 2^{a\cdot a} = 2^a$, לפי 91א', 90ג' ותכונות $\le$.

ג. נובע מ-ב' כאשר $a = 2^{\aleph_0}$.

95. **חד משמעיות החזקה על המספרים הטבעיים**. כרגע יש לנו שתי פעולות חזקה על המספרים הטבעיים. האחת היא פעולת החזקה המוכרת לנו מימים ימימה, והשניה היא פעולת החזקה שהוגדרה ב-88. שתי פעולות אלו הן אותה הפעולה.

הוכחה. נסמן, לצורכי הוכחה זאת בלבד, את פעולת החזקה a^b שהוגדרה ב-88 ב- $\exp(a, b)$. נוכיח באינדוקציה על l כי $\exp(k, l) = k^l$. ל- $l = 0$ $\exp(k, 0) = 1 = k^0$, לפי 89א'. בהנחה שהשיוויון נכון ל-l אז $\exp(k, l + 1) = \exp(k, l) \cdot \exp(k, 1) = k^l \cdot k = k^{l+1}$, לפי 90א', הנחת האינדוקציה ו-89ג'.

96. **משפט**. a^n היא תוצאת הכפל של a לעצמו שוב ושוב עם n כופלים. במיוחד $a^2 = a \cdot a$.

הוכחה. נסמן את הכפל של a עם עצמו עם n כופלים ב- $\mathrm{mpy}(n, a)$. כפל זה מוגדר ע"י הרקורסיה הבאה: $\mathrm{mpy}(0, a) = 1$ ו- $\mathrm{mpy}(n+1, a) = \mathrm{mpy}(n, a) \cdot a$. השיוויון $\mathrm{mpy}(n, a) = a^n$ מוכח באינדוקציה על n.

97. **משפט**. א. עוצמת קבוצת כל הפונקציות הממשיות ${}^{\Re}\Re$ היא $2^{2^{\aleph_0}}$. [92 ו-94ג']

ב. עוצמת קבוצת כל הפונקציות הממשיות הרציפות היא $2^{\aleph_0}$.

הוכחה. ב. תהי W קבוצת כל הפונקציות הממשיות הרציפות. תהי $F : \Re \to W$ כך שלכל $z \in \Re$ $F(z)$ היא הפונקציה הקבועה z, כלומר, לכל $x \in \Re$ $F(z)(x) = z$. F היא חח"ע ולכן $2^{\aleph_0} \le |W|$. כעת תהי $G : W \to {}^{Q}\Re$ הפונקציה הנתונה ע"י $G(f) = f \restriction Q$, היכן ש-Q היא קבוצת הרציונליים. G היא חח"ע כי כל הערכים של פונקציה ממשית רציפה נקבעים ע"י ערכיה על הרציונליים. לכן $|W| \le \left|{}^{Q}\Re\right| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, לפי 94א'.